全ての有限カンドルを含むカンドルの構成

大阪公立大学　大学院理学研究科　数学専攻
甲斐 涼哉 (Ryoya KAI) *

概要

Cayley の定理は群論の初等的な結果で，任意の有限群は対称群のある部分群と同型であることを主張している．したがって，対称群の帰納極限は任意の有限群を含む．本講演では，対称群と似た振る舞いをするカンドルを構成し，そのようなカンドルの帰納極限として，任意の有限カンドルを含むカンドルを構成する．さらに，これらのカンドルのいくつかの応用についても述べる．

1　カンドル

カンドルとは空でない集合 X とその上の二項演算 $\triangleleft : X \times X \to X$ の組で，以下を満たすものである：

Q1 任意の $x \in X$ に対して，$x \triangleleft x = x$,
Q2 任意の $y \in X$ に対して，右からの演算 $s_y : X \ni x \mapsto x \triangleleft y \in X$ が全単射,
Q3 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

定義における写像 s_y を $y \in X$ における**点対称**と呼ぶ．また，$x \triangleleft^{-1} y := s_y^{-1}(x)$ とかく．2 つのカンドルの間の写像で二項演算を保つものを，**カンドル準同型**という．以下に，カンドルの例を挙げる．

例 1.1 (cf. [Loo69])**.** (M, s) を対称空間とする．ここで，$s : M \to \mathrm{Diff}(M)$ は $x \in M$ に対して、その点での点対称 $s_x : M \to M$ を与える写像である．M 上の二項演算を $x \triangleleft y := s_y(x)$ と定めると、M はカンドルになる．

例 1.2. G を群とする．G 上の二項演算を $x \triangleleft y := y^{-1}xy$ で定めるとカンドルになる．これを群 G の**共役カンドル**と呼び，$\mathrm{Conj}(G)$ とかく．また，G の部分集合 C が共役演算で閉じているとき，C は $\mathrm{Conj}(G)$ の部分カンドルとなり，これを $\mathrm{Conj}(C)$ とかく．

例 1.3. 群 G とその自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ をとる．このとき，G 上の二項演算を $x \triangleleft y := \sigma(xy^{-1})y$ で定めるとカンドルになる．これを**一般化** *Alexander quandle* と呼び，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ とかく．

また，X 上の二項演算 $\triangleleft$ が条件 (Q2), (Q3) を満たすとき，X を**ラック**という．明らかに，任意のカンドルはラックである．一方で，カンドルではないラックも存在する．

* E-mail: kai.ryoya.math@gmail.com

例 1.4 ([FR92])**.** 群 G が集合 X に右から作用しているとする．このとき，$X \times G$ は二項演算を $(x, g) \triangleleft (y, h) := (x \cdot h, h^{-1}gh)$ に定めることでラックとなる．このラックを $X \times_R G$ と書く．

ラックが与えられると，その二項演算を用いてカンドルを構成することができる．

命題 1.5 ([AG03])**.** $\triangleleft$ を集合 X 上のラック演算とする．このとき，以下で定まる二項演算 $\tilde{\triangleleft}$ は X 上のカンドル演算となる:

$$x \tilde{\triangleleft} y := (x \triangleleft^{-1} x) \triangleleft y \quad (x, y \in X).$$

2　群作用から定まるカンドル

例 1.4のラックを命題 1.5を用いてカンドルにすると，次が得られる．

定義 2.1. 群 G が集合 X に右から作用しているとする．このとき，直積 $X \times G$ 上の二項演算 $\triangleleft$ を次で定義する：

$$(x, g) \triangleleft (y, h) = (x \cdot g^{-1}h, h^{-1}gh) \quad ((x, g), (y, h) \in X \times G).$$

また，$X \times_Q G := (X \times G, \triangleleft)$ とかく．

命題 2.2. $X \times_Q G$ はカンドルである．ここで，$(x, g) \triangleleft^{-1} (y, h) = (x \cdot gh^{-1}, h^{-1}gh)$ で与えられる．

続けて，このカンドルの標準的な部分カンドルを構成する．

命題 2.3. 群 G が集合 X に右から作用しているとする．$\alpha \in G$ と $p \in X$ を固定する．α の G での共役類を C_α とする．また，$\{xy^{-1} \mid x, y \in C_\alpha\}$ で生成される部分群を D とし，p の D による軌道を Y とおく．このとき，$X \times_Q G$ の部分集合 $Y \times_Q C_\alpha$ を次で定義する：

$$Y \times_Q C_\alpha := \{(p \cdot d, d^{-1}ad) \in Y \times C_\alpha \mid d \in D\}.$$

このとき，次が成り立つ．

1. $Y \times_Q C_\alpha$ は $X \times_Q G$ の部分カンドル．
2. Y への D の作用が自明ならば，$Y \times_Q C_\alpha$ は $\mathrm{Conj}(C_\alpha)$ と同型．
3. Y への D の作用が自由ならば，$Y \times_Q C_\alpha$ は $\mathrm{GAlex}(D, \iota_\alpha)$ と同型．ただし，$\iota_\alpha(d) := \alpha^{-1}d\alpha$.

例 2.4 (cf [Eis03])**.** K を S^3 内の結び目とする．$G(K) = \pi_1(S^3 \setminus K)$ を結び目群とし，$G(K)$ の $G(K)$ 自身への右作用 $g \cdot h := gh$ を考える．このとき，メリディアン $\mu \in G(K)$ の共役類 C_μ と単位元 $e \in G(K)$ の軌道 Y による部分カンドル $Y \times_Q C_\mu$ は，K を一点で切り開いて得られる long knot の結び目カンドルに同型となる．

一般にカンドル X が与えられると，点対称が生成する群 $\mathrm{Inn}(X) := \langle s_x \mid x \in X \rangle$ が右から作用する．この作用から定まるカンドル $X \times_Q \mathrm{Inn}(X)$ を考えると，次が成り立つ：

命題 2.5. カンドル X に対して，$\phi(x) := (x, s_x)$ で定まる写像 $\phi : X \to X \times_Q \mathrm{Inn}(X)$ は単射カンドル準同型である．

3　主結果と応用

n 点からなる集合を $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ とかく．$[n]$ には n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が自然に作用する．

定義 3.1. n 次対称群 $\mathfrak{S}$ の $[n]$ への作用から定まるカンドルを $Q\mathfrak{S}_n := [n] \times_Q \mathfrak{S}_n$ とかく．

次が本稿の主定理である．

定理 3.2. 有限カンドル X に対して，ある正整数 n が存在して，単射準同型 $X \to Q\mathfrak{S}_n$ が存在する．

Proof. X の濃度を n とおく．また，X の各元に添え字を与え，$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とする．このとき，任意の $x \in X$ に対して，対称群のある元 $\sigma_x \in \mathfrak{S}_n$ が存在して，$x_i \triangleleft x = x_{\sigma_x(i)}$ と書ける．このとき，$\phi(x_i) = (i, \sigma_{x_i})$ で定まる写像 $\phi : X \to [n] \times_Q \mathfrak{S}_n$ は単射カンドル準同型である． □

系 3.3. 帰納極限 $\varinjlim Q\mathfrak{S}_n$ は任意の有限カンドルを部分カンドルとして含む．

続けて，このカンドルの応用を述べる．ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の単位球面 S^{2n-1} へのユニタリ群 $U(n)$ の作用から得られるカンドル $S^{2n-1} \times_Q U(n)$ を考える．n 点集合 $[n]$ を標準基底に送る写像 $e : [n] \to S^{2n-1}$ と，置換表現 $\rho : \mathfrak{S}_n \to U(n)$ を用いることで次を得る．

系 3.4. $Q\mathfrak{S}_n$ は $S^{2n-1} \times U(n)$ に単射で埋め込める．特に，任意の有限カンドルは $S^{2n-1} \times U(n)$ の部分カンドルとなる．

カンドルがある群の共役カンドルに埋め込めるとき，そのカンドルは *admissible* であるという．3 点集合上の admissible ではないカンドルが知られている．したがって，次も得られる．

系 3.5. $n > 2$ に対して，$Q\mathfrak{S}_n$ は admissible ではない．

参考文献

[AG03] Nicolás Andruskiewitsch and Matías Graña. From racks to pointed Hopf algebras. *Advances in Mathematics*, 178(2):177–243, September 2003.

[Eis03] Michael Eisermann. Homological characterization of the unknot. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 177(2):131–157, January 2003.

[FR92] Roger Fenn and Colin Rourke. Racks and links in codimension two. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 1(4):343–406, 1992.

[Loo69] Ottmar Loos. *Symmetric Spaces. I: General Theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.